Серия 13. Заминка после сборов.

1. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Окружность $\mathit{\Gamma}_B$ проходит через вершины A и B и касается AC, окружность $\mathit{\Gamma}_C$ проходит через вершины A и C и касается AB. Через точку A провели прямую, которая повторно пересекла $\mathit{\Gamma}_B$ в точке X и $\mathit{\Gamma}_C$ в точке Y. Докажите, что $OX = OY$.

2. В стране $2018n+1$ городов. При каких n некоторые пары из них можно соединить двусторонними дорогами так, чтобы для любого города C и любого $1 \leqslant i \leqslant 2018$ существовало ровно n городов, находящихся на расстоянии i от города C? (Расстояние между городами — количество дорог в кратчайшем пути между ними.)

3. Докажите, что существует бесконечно много таких попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c, что

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca).$$

4. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABX и CDX. Докажите, что $4O_1O_2 \geqslant AB + CD$.

5. Для данного простого числа p последовательность a_k определяется следующими условиями: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k$. Найдите все p, при которых в этой последовательности встретится число -1.

6. Даны натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Правительство страны Оптимистики ежегодно публикует *Годовой Отчет*, содержащий n экономических индикаторов. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ индикатор под номером i может принимать натуральные значения $1, 2, \ldots, a_i$. Годовой Отчет называется *оптимистичным,* если значения хотя бы $n-1$ индикаторов выросли по сравнению с предыдущим годом. Докажите, что правительство может бесконечно долго публиковать оптимистичные Годовые Отчеты.