Серия 11. Про последовательности.

1. Последовательность натуральных чисел a_n строится следующим образом: $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ и $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ для натуральных n. Докажите, что для любого простого p число a_p делится на p.

2. Найдите все такие функции $f(x) : [0; +\infty) \longrightarrow [0; +\infty)$, что для любого $x \geqslant 0$ выполнено равенство $6f(f(x)) + f(x) - x = 0$.

3. Докажите, что существует ровно одна последовательность целых чисел $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что $a_1 = 1$, $a_2 > 1$ и $a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}$.

4. Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных a и b, что $a^8 + b^4 + 1$ делится на ab.

5. Suppose that a sequence $a_1, a_2, \ldots$ of positive real numbers satisfies

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

for every positive integer k. Prove that $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$ for every $n \geqslant 2$.

6. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ заданы условиями: $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n+a_nb_n}{b_n}$ и $b_{n+1} = \frac{1+b_n+a_nb_n}{a_n}$. Докажите, что $a_{2018} < 5$.

7. Существует ли такая ограниченная последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, что для любых натуральных $m > n$ выполнено неравенство $|a_m - a_n| > \frac{1}{m-n}$?