Геометрия, подсказки

1. Let $ABCD$ be cyclic quadriateral and let AC and BD intersect at E and AB and CD at F. Let K be point in plane such that $ABKC$ is parallelogram. Prove $\angle AFE = \angle CDK$.

Ну эта и так простая.

2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC ($\angle A < 60^\circ$). Обозначим через B', C', O' отражения точек B, C, O относительно прямых AC, AB, BC соответственно. Докажите, что прямая AO' содержит диаметр окружности $(AB'C')$.

Кроме множества геометрических решений, здесь хорошо работает изогональное сопряжение; задача неожиданно для самой себя может быть задвигана линейно; кроме того, она быстро и просто считается в комплексных координатах.

3. На описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BAC, ABC, BCA соответственно. Обозначим через ω_A, ω_B, ω_C окружности, проходящие через A, B, C с центрами A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точка Нагеля треугольника ABC является радикальным центром окружностей ω_A, ω_B, ω_C.

Если задаться целью выяснить геометрическую природу радикальной оси двух странных окружностей, их иногда полезно пересечь с третьей.

4. Окружность ξ касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках D и E соответственно, причем $BD+CE < BC$. Точки F и G лежат на BC и таковы, что $BF = BD$, $CG = CE$. Прямые DG и EF пересекаются в точке K, а точка L на малой дуге DE окружности ξ такова, что касательная в точке L к окружности ξ параллельная BC. Докажите, что инцентр треугольника ABC лежит на прямой KL.

Не исключено, что в конце решения пригодится следующая лемма: если два вектора дают пропорциональные пары проекций на две прямые, то они коллинеарны. Также задача довольно прикольно и естественно двигается (вторым способом, что приходит в голову).

5. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O; BH_B и CH_C — высоты, BL_B, CL_C — биссектрисы. Точки I_B, I_C — центры вневписанный окружностей напротив вершин B и C соответственно. Прямые I_BH_C и I_CH_B пересекаются в точке X. Докажите, что $OX \perp L_BL_C$.

Во-первых, раз $OI_A \perp L_BL_C$ (общеизвестно), достаточно доказать коллинеарность O, X и I_A. Во-вторых, надо что-то понять про природу прямой I_BH_C; очень уж мешает жить основание высоты (это особенно ярко видно, *если перестроить картинку относительно $I_AI_BI_C$). Вспомните или придумайте какой-нибудь способ переопределить прямую IH_A ($\leftarrow$ опечатки нет, с точкой I интуиция работает лучше) так, чтобы этот способ не опирался на точку H_A.*

6. Дан треугольник ABC. Точка A_1 на вневписанной окружности ω_A выбрана так, что прямая BC делит пополам отрезок касательной к ω_A в точке A_1, высекаемый углом BAC. Аналогично выбраны точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

После некоторых несложных манипуляций в начале, задача сводится к лемме: вписанная окружность ω касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1; на соответственных меньших дугах окружности ω отмечены точки X_A, X_B, X_C. Так вот, прямые AX_A, BX_B, CX_C имеют общую точку тогда и только тогда, когда A_1X_A, B_1X_B, C_1X_C имеют общую точку.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. На его сторонах AB, BC, CD, DA отмечены пары точек K_1 и K_2, L_1 и L_2, M_1 и M_2, N_1 и N_2 соответственно (в указанном циклическом порядке при обходе $A-B-C-D$). Пары отрезков K_1M_2 и L_1N_2, K_2M_1 и L_1N_2, K_2M_1 и L_2N_1, K_1M_2 и L_2N_1, пересекаются в точках A', B', C', D' соответственно. Известно, что четырёхугольники $AK_1A'N_2$, $BL_1B'K_2$, $CM_1C'L_2$, $DN_1D'M_2$, $A'B'C'D'$ — описанные; обозначим центры вписанных в них окружностей через I_A, I_B, I_C, I_D, I соответственно.
(a) Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Её центр обозначим через J.
(b) Докажите, что середины отрезков I_AI_C, I_BI_D, IJ коллинеарны.

В пункте (a) надо просто посчитать отрезки касательных. В пункте (b) можно пописать линейные функции в духе теоремы Ньютона (в описанном четырёхугольнике $ABCD$ на прямой, заданной условием $S_{XAB} + S_{XCD} = S_{XBC} + S_{XDA}$, лежат середины диагоналей и точка I). А можно придумать супер короткое красивое решение. Наводящий вопрос: каким простым условием связаны между собой точки I_A, I_B, I_C, I_D, I, J?