IMO 2019	Комбинаторная геометрия	30 ноября 2018

1. Дано натуральное $n \geq 5$. При каком наибольшем k могдо оказаться так, что несамопересекающийся n-угольник имеет в точности k внутренних прямых углов (т.е. именно $90°$, а не $270°$)?

2. Назовем диагональ правильного 2018-угольника *нечетной*, если она делит границу многоугольника на две части, состоящие из нечетного числа сторон. В нем провели 2015 диагоналей, которые не пересекаются по внутренним точкам. Какое наибольшее количество равнобедренных треугольников с двумя нечетными сторонами могло оказаться?

3. Назовем набор точек на плоскости сбалансированным, если для любых двух точек A, B найдется точка C из набора такая, что $AC = BC$, но ни для каких трех точек A, B, C из набора не найдется точки P из набора такой, что $PA = PB = PC$. При каких $n \geq 3$ существует сбалансированный набор из n точек?

4. На плоскости нарисовано n прямоугольников с параллельными сторонами, причем никакие две стороны прямоугольников не лежат на одной прямой. Отмеченные n прямоугольников разбивают плоскость на несколько областей. Назовем область *красивой*, если она содержит хотя бы одну из вершин исходных прямоугольников. Докажите, что сумма количеств вершин во всех красивых областях не меньше, чем $40n$.

5. На плоскости взяли все целые точки и нарисовали круги радиуса $\frac{1}{2018}$ с центром в каждой точке.

(a) Докажите, что найдется правильный треугольник, все вершины которого лежат в разных нарисованных.

(b) Докажите, что любой такой треугольник имеет стоону не меньше, чем 250.

6. В выпуклом n-угольнике проведены $n-3$ красные диагонали и $n-3$ синие диагонали. Оказалось, что никакие две одноцветные диагонали не пересекаются по внутренним точкам n-угольника. Какое наибольшее количество точек пересечения красных и синих диагоналей могло оказаться?

IMO 2019	Комбинаторная геометрия	30 ноября 2018

1. Дано натуральное $n \geq 5$. При каком наибольшем k могдо оказаться так, что несамопересекающийся n-угольник имеет в точности k внутренних прямых углов (т.е. именно $90°$, а не $270°$)?

2. Назовем диагональ правильного 2018-угольника *нечетной*, если она делит границу многоугольника на две части, состоящие из нечетного числа сторон. В нем провели 2015 диагоналей, которые не пересекаются по внутренним точкам. Какое наибольшее количество равнобедренных треугольников с двумя нечетными сторонами могло оказаться?

3. Назовем набор точек на плоскости сбалансированным, если для любых двух точек A, B найдется точка C из набора такая, что $AC = BC$, но ни для каких трех точек A, B, C из набора не найдется точки P из набора такой, что $PA = PB = PC$. При каких $n \geq 3$ существует сбалансированный набор из n точек?

4. На плоскости нарисовано n прямоугольников с параллельными сторонами, причем никакие две стороны прямоугольников не лежат на одной прямой. Отмеченные n прямоугольников разбивают плоскость на несколько областей. Назовем область *красивой*, если она содержит хотя бы одну из вершин исходных прямоугольников. Докажите, что сумма количеств вершин во всех красивых областях не меньше, чем $40n$.

5. На плоскости взяли все целые точки и нарисовали круги радиуса $\frac{1}{2018}$ с центром в каждой точке.

(a) Докажите, что найдется правильный треугольник, все вершины которого лежат в разных нарисованных.

(b) Докажите, что любой такой треугольник имеет стоону не меньше, чем 250.

6. В выпуклом n-угольнике проведены $n-3$ красные диагонали и $n-3$ синие диагонали. Оказалось, что никакие две одноцветные диагонали не пересекаются по внутренним точкам n-угольника. Какое наибольшее количество точек пересечения красных и синих диагоналей могло оказаться?