

1. Прямоугольник разбит на  $n > 1$  меньших прямоугольников. Оказалось, что любая прямая, параллельная одной из сторон большого прямоугольника и пересекающая внутренность, пересекает внутренность одного из прямоугольников разбиения. Докажите, что хотя бы один из прямоугольников разбиения не имеет точек на границе большого прямоугольника.

2. Дано конечное множество чисел  $A$  с нулевой суммой. В нем взяты подмножества  $A_1, \dots, A_n$  такие, что для любых элементов  $x_1, \dots, x_n$  таких, что  $x_i \in A_i$  выполнено условие  $x_1 + x_2 + \dots + x_n > 0$ . Докажите, что существует натуральное  $k \leq n$  и набор различных индексов  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , что

$$|A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}| < \frac{k}{n}|A|.$$

3. Будем называть колумбийской конфигурацией набор из 4035 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, при этом 2017 из них покрашены в красный цвет, а остальные 2018 — в синий. Рассмотрим набор прямых, делящих плоскость на несколько областей. Назовем этот набор хорошим для данной колумбийской конфигурации точек, если выполнены следующие два условия:

- никакая прямая не проходит ни через одну из точек конфигурации;
- никакая область разбиения не содержит точек обоих цветов.

Найдите наименьшее  $k$  такое, что для любой колумбийской конфигурации из 4035 точек найдется хороший набор из  $k$  прямых.

4. Банк выпускает монеты номиналом  $1/n$  тугриков для каждого натурального  $n$ . Есть несколько монет суммарного достоинства не больше  $2017\frac{1}{2}$  тугриков. Докажите, что их можно раздать 2018 бездомным так, чтобы каждый получил не больше одного тугрика.

5. Есть шесть кучек с монетами, кучки пронумерованы числами от 1 до 6. Изначально в каждой кучке по одной монете. За один ход разрешается сделать одну из двух операций:

- убрать одну монету из кучки  $k \leq 5$  и положить две монеты в кучку  $k + 1$ ;
- убрать одну монету из кучки  $k \leq 4$  и поменять местами кучки  $k + 1$  и  $k + 2$ .

Можно ли сделать так, чтобы все кучки, кроме шестой оказались пустыми, а в шестой кучке было  $2018^{2018^{2018}}$  монет?