

1. Есть доска  $100 \times 100$  с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций всю доску можно включить?
2. Есть таблица  $8 \times 8$ , изначально заполненная нулями. Разрешается прибавлять по 1 к любому квадрату  $3 \times 3$  или  $4 \times 4$ . Все ли расстановки остатков по модулю 7 можно получить?
3. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Доказать, что в хорошем определителе не может быть описано более 50 растений.
4. Пусть  $A_1, \dots, A_m$  — различные непустые подмножества  $n$ -элементного множества. Если пересечение любых двух различных из них состоит из  $l$  элементов, то  $m \leq n$ .
5. В дворце пионеров 28 кружков. Школьники посещают кружки так, что любые два школьника посещают разные наборы кружков, а вместе — четное число кружков. Более того, каждый из них посещает четное число кружков. Какое наибольшее количество школьников могут ходить во дворец пионеров?
6. Имеется  $n$  лампочек и несколько выключателей. Каждый выключатель подключен к нескольким лампочкам и при переключении меняет состояние всех подключенных к нему лампочек. Оказалось, что для любого непустого подмножества лампочек есть выключатель, который меняет состояние нечетного числа из этих лампочек. Докажите, что если изначально все лампочки не горели, то в конце их все можно включить.
7. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.
8. У Васи есть строка  $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$  из  $p$  остатков по модулю  $p$  ( $p > 2$  — простое), где индексы переменных — тоже остатки. За одну операцию может выбрать произвольный остаток  $a$  и заменить одновременно все элементы  $x_i$  строки по правилу  $x'_i = x_i - x_{i+a}$ . Сколько различных строк может получить Вася через 100 ходов, если он может варьировать начальную строку и параметр  $a$  на каждом ходу?

1. Есть доска  $100 \times 100$  с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций всю доску можно включить?
2. Есть таблица  $8 \times 8$ , изначально заполненная нулями. Разрешается прибавлять по 1 к любому квадрату  $3 \times 3$  или  $4 \times 4$ . Все ли расстановки остатков по модулю 7 можно получить?
3. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Доказать, что в хорошем определителе не может быть описано более 50 растений.
4. Пусть  $A_1, \dots, A_m$  — различные непустые подмножества  $n$ -элементного множества. Если пересечение любых двух различных из них состоит из  $l$  элементов, то  $m \leq n$ .
5. В дворце пионеров 28 кружков. Школьники посещают кружки так, что любые два школьника посещают разные наборы кружков, а вместе — четное число кружков. Более того, каждый из них посещает четное число кружков. Какое наибольшее количество школьников могут ходить во дворец пионеров?
6. Имеется  $n$  лампочек и несколько выключателей. Каждый выключатель подключен к нескольким лампочкам и при переключении меняет состояние всех подключенных к нему лампочек. Оказалось, что для любого непустого подмножества лампочек есть выключатель, который меняет состояние нечетного числа из этих лампочек. Докажите, что если изначально все лампочки не горели, то в конце их все можно включить.
7. Дан граф, в каждой вершине которого есть лампочка и выключатель, который меняет состояние лампочки в вершине и во всех смежных с ней вершинах. Изначально ни одна лампочка не горит. Докажите, что все их можно включить.
8. У Васи есть строка  $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$  из  $p$  остатков по модулю  $p$  ( $p > 2$  — простое), где индексы переменных — тоже остатки. За одну операцию может выбрать произвольный остаток  $a$  и заменить одновременно все элементы  $x_i$  строки по правилу  $x'_i = x_i - x_{i+a}$ . Сколько различных строк может получить Вася через 100 ходов, если он может варьировать начальную строку и параметр  $a$  на каждом ходу?