Оценка + пример

1. Сто первых натуральных чисел в каком-то порядке записали в ряд и вычислили 98 сумм, получаемых при сложении троек подряд идущих чисел. Какое наибольшее число нечетных сумм могло при это получится?

2. В каждую клетку прямоугольника 10×19 записано одно из чисел 0 или 1, после чего подсчитали суммы цифр в каждой строке и в каждом столбце. Какое наибольшее количество различных чисел могло получится?

3. Сумма нескольких натуральных чисел, в записи которых присутствуют только 0 и 3, равна $55\ldots55$ (2019 пятерок). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?

4. При каком наименьшем n число $122\ldots221$ (n двоек) делится на 999 999 999?

5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

6. Каждый вечер Буратино закапывает все свои монеты на Поле Чудес, а каждое утро выкапывает обратно. Если количество закопанных монет — четно, то на следующий день половина монет исчезнет, а если нечетно, то количество монет увеличивается на 1001, а потом исчезает половина. Первоначально у Буратино есть 1 золотая монет. Назовем натуральное число n допустимым, если спустя несколько дней у Буратино может оказаться n монет.
(a) Докажите, что 777 не является допустимым числом.
(b) Докажите, что допустимых чисел меньше 500.
(c*) Найдите точное число допустимых чисел.

7. Дана пара натуральных чисел a и b ($a < b$). Разрешается производить следующие действия: если есть пара (x, y), то можно получить пару $(x + 1, y + 1)$, если есть пара $(2x, 2y)$, то можно получить пару (x, y) и если есть две пары (x, y) и (y, z), то можно получить пару (x, z) (старые пары чисел не исчезают). Для каких n можно получить пару $(1, n)$.