Композиция гомотетий

1. Даны гомотетии H_A^k и H_B^l. Докажите, что композиция $H_A^k \circ H_B^l$ является гомотетией или параллельным переносом.

2. Найдите все гомотетии, которые переводят окружность ω в саму себя (как множество точек).

3. На плоскости нарисованы три непересекающихся неравных круга. Для каждой пары кругов отметили две точки пересечения общих касательных: одну — внешних, вторую — внутренних.

(a) (*Теорема о трёх колпаках*) Докажите, что точки пересечения внешних общих касательных лежат на одной прямой.

(b) Докажите, что если центры кругов не лежат на одной прямой, то все шесть отмеченных точек служат вершинами *четырёхсторонника*, т. е. лежат по три на четырёх прямых.

4. На плоскости зафиксированы две неравные окружности α и β. Произвольная окружность ω касается их внутренним образом в точках A_ω и B_ω соответственно. Докажите, что все прямые $A_\omega B_\omega$ проходят через одну точку, не зависящую от выбора ω.

5. На продолжении стороны CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) за точку D отмечена точка P, точка M — середина AD. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q, PB и AD — в точке X, а BQ и AD — в точке Y. Докажите, что M — середина XY.

6. Внутри треугольника ABC расположены три непересекающихся круга: ω_A, ω_B, ω_C. Каждый из них касается двух соответственных сторон треугольника. Круг ω касается внешним образом их всех в точках A', B', C' соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB, DC пересекаются в точке P, а лучи AD, BC — в точке Q. Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B, C, D, можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A, также можно вписать окружность.

8. В угол с вершиной O вписаны две окружности ω_1 и ω_2. Луч с началом в точке O пересекает ω_1 в точках A_1 и B_1, а ω_2 — в точках A_2 и B_2 ($OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$). Окружность γ_1 касается внутренним образом окружности ω_1 и касательных к ω_2, проведённых из A_1. Окружность γ_2 касается внутренним образом окружности ω_2 и касательных к ω_1, проведённых из B_2. Докажите, что окружности γ_1 и γ_2 равны.