Гомотетия

Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется называется преобразование плоскости, которое переводит каждую точку X в такую точку X', что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$.

1. Докажите, что

(a) если прямая содержит центр гомотетии, то она отображается в себя;

(b) если прямая не содержит центр гомотетии, то она отображается в параллельную прямую;

(c) при гомотетии окружность переходит в окружность.

2. Преобразование f обладает следующим свойством: для любых точек A и B выполнено $\overrightarrow{f(A)f(B)} = k\overrightarrow{AB}$ для некоторого постоянного $k \neq 1$. Докажите, что оно является гомотетией.

3. **(a)** Даны два неравных параллельных отрезка. Найдите все гомотетии, которые переводят один отрезок в другой.

(b) С помощью предыдущей задачи докажите *замечательное свойство трапеции*: точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.

4. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка D, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и AC равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, соответствующих вершине A, тоже равны.

5. Треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB \parallel A'B', AC \parallel A'C', BC \parallel B'C'$. Докажите, что существует гомотетия или параллельный перенос, переводящий один треугольник в другой.

6. Пусть в окружности ω проведена хорда AB, и ещё одна окружность касается ω в точке C и отрезка AB в точке D. Тогда прямая CD проходит через середину дуги AB, не содержащей точки C.

7. Пусть M и P — точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC со стороной BC, MN — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, N и P лежат на одной прямой.

8. Через середину M стороны BC неравнобедренного треугольника ABC проведена касательная к его вписанной окружности, отличная от BC, точка касания обозначена через Y. Докажите, что прямая AY проходит через точку касания вневписанной окружности с отрезком BC.