

Снова раскраски графов

Граф называется плоским, если он изображен на плоскости так, что вершинам соответствуют различные точки плоскости, а ребрам – непересекающиеся ломаные между этими вершинами.

Для плоского графа можно определить грань как одну из областей, на которые ребра графа делят плоскость (в том числе, «внешнюю» область).

- (а) (Формула Эйлера). Пусть V – число вершин, E – ребер, F – граней, k – компонент связности плоского графа. Тогда $V - E + F = 1 + k$.

(б) Докажите, что для любого плоского графа ($V > 2$) справедливо неравенство $2E \geq 3F$.

(в) Докажите, что для любого плоского графа ($V > 2$) справедливо неравенство $E \leq 3V - 6$.

(г) Докажите, что в двудольном плоском графе $E \geq 2F$, если $E \geq 2$.

(е) Докажите, что в двудольном плоском графе $E \leq 2V - 4$, если $E \geq 2$.
- Вася нарисовал на плоскости политическую карту мира не отрывая руки от бумаги, при этом закончил там же, где и начал. Докажите, что получившуюся карту можно раскрасить в два цвета правильным образом.
- Докажите, что карту мира можно покрасить правильным образом (а) в 6 цветов; (б) в 5 цветов.
- Докажите, что любой граф можно покрасить в два цвета так, чтобы разноцветных ребер было не меньше, чем одноцветных.
- В графе из 25 вершин у любых двух вершин имеется вершина, соединенная с обеими. Докажите, что в этом графе не меньше 36 ребер.