

## Снова раскраски графов

Граф называется плоским, если он изображен на плоскости так, что вершинам соответствуют различные точки плоскости, а ребрам – непересекающиеся ломаные между этими вершинами.

Для плоского графа можно определить грань как одну из областей, на которые ребра графа делят плоскость (в том числе, «внешнюю» область).

- (а) (Формула Эйлера). Пусть  $V$  – число вершин,  $E$  – ребер,  $F$  – граней,  $k$  – компонент связности плоского графа. Тогда  $V - E + F = 1 + k$ .

(б) Докажите, что для любого плоского графа ( $V > 2$ ) справедливо неравенство  $2E \geq 3F$ .

(в) Докажите, что для любого плоского графа ( $V > 2$ ) справедливо неравенство  $E \leq 3V - 6$ .

(г) Докажите, что в двудольном плоском графе  $E \geq 2F$ , если  $E \geq 2$ .

(е) Докажите, что в двудольном плоском графе  $E \leq 2V - 4$ , если  $E \geq 2$ .
- Вася нарисовал на плоскости политическую карту мира не отрывая руки от бумаги, при этом закончил там же, где и начал. Докажите, что получившуюся карту можно раскрасить в два цвета правильным образом.
- Докажите, что карту мира можно покрасить правильным образом (а) в 6 цветов; (б) в 5 цветов.
- Докажите, что любой граф можно покрасить в два цвета так, чтобы разноцветных ребер было не меньше, чем одноцветных.
- В графе из 25 вершин у любых двух вершин имеется вершина, соединенная с обеими. Докажите, что в этом графе не меньше 36 ребер.