

Счет отрезков

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 , CC_1 . Точка D — основание перпендикуляра из B_1 на AB , E — точка пересечения перпендикуляра из точки D на сторону BC с отрезком BB_1 . Докажите, что прямая EC_1 параллельна AC .
2. Через центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ проведена прямая. Она пересекает сторону AB в точке X и сторону CD в точке Y ; углы $\angle AXY$ и $\angle DYX$ равны. Докажите, что $AH/BH = CY/DY$.
3. AE и CD — высоты остроугольного треугольника ABC . Биссектриса угла B пересекает отрезок DE в точке F . На отрезках AE и CD взяли такие точки P и Q соответственно, что четырехугольники $ADFP$ и $CEFP$ — вписанные. Докажите, что $AP = CQ$.
4. Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC , причем $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD .
5. Даны непересекающиеся окружности S_1 и S_2 и их общие внешние касательные ℓ_1 и ℓ_2 . На ℓ_1 между точками касания отметили точку A , а на ℓ_2 — точки B и C так, что AB и AC — касательные к S_1 и S_2 . Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 , а K — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC . Докажите, что середина отрезка O_1O_2 равноудалена от точек A и K .
6. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC , точка C_1 симметрична C относительно O , D — середина стороны AB , K — центр описанной окружности треугольника ODC_1 . Докажите, что точка O делит пополам отрезок прямой OK , лежащий внутри угла ACB .
7. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке C' . Окружность, вписанная в треугольник ACC' , касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 ; окружность, вписанная в треугольник BCC' , касается сторон AB и BC в точках C_2 и A_2 . Докажите, что прямые B_1C_1 , A_2C_2 и CC' пересекаются в одной точке.
8. Пусть D , E и F — середины сторон BC , AB , AC треугольника ABC соответственно. Биссектрисы углов ADB и ADC пересекаются со сторонами AB и AC в точках M и N соответственно. X — пересечение AD и MN , P — пересечение AB и FX , Q — пересечение AC и EX . Докажите, что $PR = AD$.
9. Медиана AM треугольника ABC пересекает вписанную в него окружность в

точках X и Y . Известно, что $AB = AC + AM$. Найдите $\angle XIY$, где I — центр вписанной окружности.

10. В остроугольном треугольнике ABC с наименьшей стороной AC отметили точки P и Q на сторонах AB и BC соответственно так, что $AP = CQ = AC$. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямой OI , где O и I центры описанной и вписанной окружности треугольника.