

## Неравенства, суммы и последовательности

1. Докажите, что при любом натуральном  $n$  выполнено двойное неравенство

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

2. Пусть  $S(n)$  — количество представлений числа  $n$  виде симметричных сумм с любым числом слагаемых (в том числе, с одним). Найдите  $S(1000)$ .
3. По кругу стоит  $2n$  чисел, сумма которых положительна. Для каждого числа рассмотрим обе группы из  $n$  стоящих чисел, для которых это число является крайним. Докажите, что найдётся число, для которого сумма в каждой из этих групп положительна.
4. На доску последовательно выписываются натуральные числа. Первое число выписано произвольно, и каждое выписанное не может быть представлено в виде чисел, выписанных ранее (даже если использовать каждое ранее выписанное несколько раз). Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?
5. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что для любого натурального  $k$  сумма любых  $k$  идущих подряд членов этой последовательности делится на  $k + 1$ ?
6. Имеется  $n > 3$  различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел выписано частное от деления большего числа на меньшее (полное или неполное). Оказалось, что все выписанные частные различны. Докажите, что хотя бы одно из исходных чисел не менее  $(n - 1)!$