Счет углов

1. Окружность ω с центром O и окружность ω_1 пересекаются в точках A и B. На дуге окружности ω, лежащей внутри ω_1 взята точка C. Вторые точки пересечения прямых AC и BC с ω_1 обозначим через E и D соответственно. Докажите, что прямые ED и OC перпендикулярны.

2. Пусть AD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90^\circ$). Точки I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ADB и ADC соответственно. Окружность с центром A и радиусом AD повторно пересекает катеты треугольника в точках K и L. Докажите, что точки I_1, I_2, K и L лежат на одной прямой.

3. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Установите, какой из отрезков BF или BE длиннее.

4. BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников BCC_1 и CBB_1, пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AX = AY$.

5. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, не лежащая на диагоналях четырёхугольника, что $\angle XDC = \angle BAC$ и $\angle XBC = \angle DAC$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$.

6. Дан вписанный четырёхугольник. Для каждой вершины рассмотрим её проекцию на диагональ, не содержащую эту вершину. Докажите, что четыре полученные точки лежат на одной окружности.

7. Стороны остроугольного треугольника отсекают от его окружности девяти точек три дуги. Докажите, что одна из этих дуг равна сумме двух других.

8. Из вершины тупого угла параллелограмма опущены перпендикуляры на стороны и диагональ. Докажите, что основания этих перпендикуляров и точка пересечения диагоналей лежат на одной окружности.

9. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Внутри треугольника ABC расположена окружность ω, которая касается сторон AB и AC в точках X и Y. Пусть Z — одна из двух точек пересечения ω с описанной окружностью треугольника BIC. Докажите, что описанные окружности треугольников BXZ и CYZ касаются.