

## Раскраски графов

Говорят, что вершины графа покрашены *правильным образом*, если любые две соседние вершины имеют различные цвета.

1. Пусть степень любой вершины графа не превосходит  $d$ . Докажите, что его вершины можно покрасить в  $d + 1$  цвет правильным образом.
2. Дан ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более  $d$  ребер. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в  $2d + 1$  цвет.
3. Пусть степень любой вершины графа не превосходит  $d$ . Докажите, что его вершины можно раскрасить в  $d^2 + 1$  цвет таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами одинакового цвета было более двух ребер.
4. Пусть степень любой вершины связного графа не превосходят  $d$ . Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в  $d$  цветов, если
  - (a) есть вершина, имеющая степень меньше, чем  $d$ ;
  - (b) есть вершина, при удалении которой, граф теряет связность;
  - (c)  $d > 2$  и есть две вершины такие, что при удалении их обоих граф теряет связность;
  - (d) есть три вершины  $u$ ,  $v$  и  $w$  такие, что  $u$  смежна с  $v$  и  $w$ , вершины  $v$  и  $w$  не смежны и при удалении вершин  $v$  и  $w$  связность не нарушается.
5. **(Теорема Брукса)** Степени всех вершин связного графа, не являющегося нечетным циклом или полным графом из  $d + 1$  вершины, не превосходят  $d$ . Докажите, что его вершины можно раскрасить в  $d$  цветов правильным образом.