

Принцип Дирихле в геометрии

1. В квадратном ковре со стороной 10 м моль проела 80 дырок. Доказать, что из него можно вырезать квадратный коврик со стороной 1 м, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными.) Дырки а) могут; б) не могут находиться на границе вырезаемого коврика.
2. Петя Торт разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Затем он проделал то же самое с одним из трех получившихся кусков и т.д. Докажите, что после некоторого количества разрезов заведомо можно выбрать среди получившихся кусков 100 многоугольников с одинаковым числом вершин (например, 100 треугольников или 100 четырехугольников и т.д.).
3. На газоне в форме правильного треугольника со стороной 3 м растут 100 гвоздик. Докажите, что найдутся 10 гвоздик, все попарные расстояния между которыми не больше 1 м.
4. Известно, что в кадр фотоаппарата, расположенного в точке O , не могут попасть предметы A и B такие, что угол AOB больше 179° . На плоскости поставлено 1000 таких фотоаппаратов. Одновременно каждым фотоаппаратом делают по одному снимку. Доказать, что найдётся снимок, на котором сфотографировано не больше 998 фотоаппаратов.
5. Точки окружности покрашены в два цвета. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.
6. Дана бесконечная клетчатая бумага и фигура, площадь которой меньше площади клетки. Докажите, что эту фигуру можно положить на бумагу, не накрыв ни одной вершины клетки.
7. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдётся кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.
8. На поверхности правильного тетраэдра с ребром 1 см отмечены девять точек. Докажите, что среди этих точек найдутся две, расстояние между которыми (в пространстве) не превосходит 0,5 см.
9. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.
10. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше $m^2 + 1$ точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдутся $m + 1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.