Метод Штурма

1. Даны числа $a < a_1 < b_1 < b$ такие, что **(a)** $a + b = a_1 + b_1$; **(b)** $ab = a_1 b_1$.

Сравните:

- $a + b$ и $a_1 + b_1$
- ab и $a_1 b_1$
- $a^2 + b^2$ и $a_1^2 + b_1^2$
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$

2. Докажите методом Штурма неравенства между средними (слева направо: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \overset{\textbf{(a)}}{\leqslant} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \overset{\textbf{(b)}}{\leqslant}$$

$$\overset{\textbf{(b)}}{\leqslant} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \overset{\textbf{(c)}}{\leqslant} \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

3. **(a)** Пусть s — среднее арифметическое набора положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$. Докажите неравенство $(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \leqslant (1 + s)^n$.

(b) Пусть s — среднее геометрическое набора положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$. Докажите неравенство $(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geqslant (1 + s)^n$.

4. Пусть положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Докажите, что

$$\frac{(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant (n - 1)^n$$

5. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\frac{(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n)}{(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n)} \geqslant \frac{1}{3}$$

6. Докажите, что среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

7. Пусть положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Докажите, что

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \ldots (n + x_n) \leqslant 2 \cdot n!$$