Теорема Шаля

Движением называется произвольное преобразование плоскости f, сохраняющее расстояние между парами точек, т.е. $|f(A)f(B)| = |AB|$.

Параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$ называют преобразование, переводящее точку X в такую точку X', что $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$.

Симметрией относительно точки A называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что A — середина отрезка XX'.

Поворотом относительно точки O называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что $OX = OX'$ и $\angle XOX' = \alpha$.

Осевой симметрией относительно прямой ℓ называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что ℓ — серединный перпендикуляр к отрезку XX'.

Скользящей симметрией называют композицию симметрии относительно некоторой прямой ℓ и переноса на вектор, параллельный ℓ.

1. Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Докажите, что существует единственное движение, которое переводит один треугольник в другой.

2. Докажите, что любое движение плоскости представимо в виде композиции параллельного переноса, поворота и, быть может, симметрии.

3. Проверьте, что

(a) композиция двух осевых симметрий относительно двух параллельных осей ℓ_1 и ℓ_2 является параллельным переносом на вектор, перпендикулярный этим осям, направленный от ℓ_1 к ℓ_2, длина которого равна удвоенному расстоянию между осями;

(b) комозиция двух осевых симметрий относительно двух пересекающихся осей ℓ_1 и ℓ_2 является поворотом относительно точки их пересечения на удвоенный угол между осями;

(c) композиция двух поворотов на углы α и β с различными центрами является поворотом на угол $\alpha + \beta$, если $\alpha + \beta \neq 2\pi k$, и параллельным переносом в противном случае;

(d) композиция параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{a}$ и поворота с центром в точке O на ненулевой угол α является поворотом на угол α.

4. Докажите, что любое движение плоскости является композицией

(a) нескольких осевых симметрий;

(b) не более чем трёх осевых симметрий.

Теорема Шаля.

- Всякое сохраняющее ориентацию движение плоскости представляет собой либо поворот, либо параллельный перенос.
- Всякое меняющее ориентацию движение плоскости является осевой или скользящей симметрией.

5. Через данную точку A провести прямую, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения ее с данной прямой и данной окружностью, делился точкой A пополам.

6. На прямоугольном бильярдном столе лежит шар. Постройте траекторию, при движении по которой шар, отразившись от каждой стенки по одному разу, вернётся на исходное место.

7. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. На его сторонах AB, BC, CD, DE и EA построили во внешнюю сторону равносторонние треугольники ABP, BCQ, CDR, DES и EAT, а затем стерли все точки, кроме P, Q, R, S и T. Как с помощью циркуля и линейки восстановить исходный пятиугольник?

8. Для каждого нечетного n впишите в данную окружность n-угольник, стороны которого параллельны заданным n прямым.