Тригонометрическая запись комплексного числа

Определение. Каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причем r определяется единственным образом, а φ — с точностью до кратного 2π (если число не равно нулю). Число r называется *модулем* (и обозначается $|z|$), φ — *аргументом* комплексного числа, а сама форма называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

Упр. Представьте в тригонометрической форме числа $2, 1+i, 1-\sqrt{3}i$.

1. **(a)** Докажите, что $|zt| = |z|\cdot|t|$ для любых $z, t \in \mathbb{C}$.
(b) Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

2. **(a)** Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).
(b) **(Формула Муавра)** Докажите, что

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

3. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 7\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

4. Вычислите
(a) $\sqrt{1+i}$; **(b)** $(1+\sqrt{3}i)^{2018}$; **(c)** $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{146}$.

5. Комплексные корни уравнения $x^n - 1 = 0$ называются корнями n-ой степени из единицы.
(a) Представьте их в тригонометрической форме.
(b) Найдите сумму этих чисел.
(c) Найдите их произведение.
(d) Найдите их сумму квадратов.

6. **(a)** Найдите все вещественные корни уравнения

$$(x+i)^{2018} + (x-i)^{2018} = 0.$$

(b) Найдите все его комплексные корни.

7. Упростите выражение:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha.$$