

## Ортоцентр

1. Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что  
(а) точка  $M$ , симметричная  $H$  относительно прямой  $AC$ , лежит на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ;  
(б) точка  $N$ , симметричная  $H$  относительно середины стороны  $AC$ , лежит на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ;  
(с)  $BN$  — диаметр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ;  
(д) радиусы окружностей, описанных около треугольников  $ABC$ ,  $AHB$ ,  $BHC$  и  $AHC$ , равны между собой.
2. **Теорема Эйлера.** Докажите, что в любом треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*).
3. В треугольнике  $ABC$  с  $\angle A = 45^\circ$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что  $B_1C_1$  — диаметр окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .
4. Докажите, что расстояние от центра описанной около треугольника окружности до его стороны вдвое меньше расстояния от ортоцентра до противоположной вершины.
5. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ . Пусть  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  — радиусы окружностей, описанных около треугольников  $ABC$ ,  $A_1B_1C$ ,  $AA_1B_1$  соответственно. Докажите, что  $R^2 = R_1^2 + R_2^2$ .
6. Высоты  $AD$  и  $CE$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Окружность, описанная около треугольника  $ACH$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $F$  и  $G$  соответственно. Докажите, что  $FG = 2DE$ .
7. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  нашлись такие точки  $M$  и  $N$ , отличные от вершин, что  $MC = BC$  и  $NA = AB$ . Точка  $P$  симметрична точке  $B$  относительно прямой  $AC$ . Докажите, что  $PB$  является биссектрисой угла  $MPN$ .
8. Дан треугольник  $ABC$  с  $\angle B = 60^\circ$ . Пусть  $O$  — центр описанной окружности,  $BL$  — биссектриса. Описанная окружность треугольника  $BOl$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  вторично в точке  $D$ . Докажите, что  $BD \perp AC$ .
9. На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  соответственно так, что  $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$ . Докажите, что точка пересечения высот треугольника  $C_1A_1B_1$  лежит на биссектрисе угла  $A$ .