

Комбинаторика в теории чисел

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученная в результате алгебраическая сумма делилась на 1001.
2. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l . Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l , если
 - (а) $l = 9$;
 - (б) l — нечётное число, не делящееся на 5.
3. Докажите, что одно из сравнений

$$x^2 \equiv 1 \pmod{101}$$

$$x^2 \equiv 2 \pmod{101}$$

...

$$x^2 \equiv 50 \pmod{101}$$

не имеет решений.

4. Докажите, что если p — простое число, то разрешимо сравнение

$$1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

5. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.
6. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы четырех квадратов целых чисел более, чем миллионом способов.
7. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+$, $-$, \times , $:$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0. Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.
8. Назовем число *хорошим*, если у него нет простых делителей, отличных от 2, 3 или 5. На доску выписали 81 хорошее число. Докажите, что из них можно выбрать четыре числа, произведение которых равняется точной четвертой степени некоторого натурального числа.