

Региональный комбинаторный разнобой

1. В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились любые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.)
2. (письменно) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца (“таблица умножения”). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
3. Изначально по кругу расставлены 40 синих, 30 красных и 20 зеленых фишек, причем фишки каждого цвета идут подряд. За ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зеленую фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов?
4. (письменно) Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.
5. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все лады, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?
6. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k удачным, если $k \leq 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k , расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными?
7. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны $1, 2, \dots, 11$ кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого?
8. Кондитерская фабрика выпускает N сортов конфет. На Новый год фабрика подарила каждому из 1000 учеников школы подарок, содержащий по конфете нескольких сортов (составы подарков могли быть разными). Каждый ученик заметил, что для любых 11 сортов конфет он получил конфету хотя бы одного из этих сортов. Однако оказалось, что для любых двух сортов найдется ученик, получивший конфету ровно одного из этих двух сортов. Найдите наибольшее возможное значение N .
9. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придётся выписать?