Региональный геометрический разнобой

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$.

3. **(письменно)** Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

5. **(письменно)** В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC, DBC, ACB и ADB образовали ромб, то $AB = CD$.

6. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X, а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y . Прямая ℓ проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY . Докажите, что ℓ касается ω.

7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

8. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ касается ω. Окружность Ω_b с центром P проходит через B, а окружность Ω_c с центром Q проходит через C. Докажите, что окружности Ω, Ω_b и Ω_c имеют общую точку

9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90^\circ$. Пусть M — середина стороны BC. Оказалось. что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.