Геометрический разнобой

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD; M — такая точка диагонали AC, что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, а I — центр вписанной окружности. Известно, что $BI^2 = BC_1 \cdot BC, CI^2 = CB_1 \cdot CB$. Докажите, что отрезок B_1C_1 проходит сквозь I.

3. Даны окружность S и точки A и B вне её. Для каждой прямой ℓ, проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N, рассмотрим описанную окружность треугольника BMN. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B.

4. В треугольнике ABC AA_1 и BB_1 — высоты. На стороне AB выбраны точки M и K так, что $B_1K \parallel BC$ и $MA_1 \parallel AC$. Докажите, что $\angle AA_1K = \angle BB_1M$.

5. Две неравные окружности с центрами M и N пересекаются в точках P и Q. Касательная к первой окружности, восстановленная в точке P, пересекает касательную в точке Q ко второй окружности в точке X. Докажите, что углы PXQ и MXN имеют общую биссектрису.

6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. B_2, C_2 – середины дуг AC и AB описанной окружности. Пусть прямые B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке P. Докажите, что AP — касательная к описанной окружности.

7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ — окружности, описанные вокруг треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Обозначим через X_A произведение степени точки A относительно ω_A на площадь треугольника BCD. Аналогично определим X_B, X_C, X_D. Докажите, что

(a) $|X_A| = |X_B| = |X_C| = |X_D|$;
(b) $X_A + X_B + X_C + X_D = 0$.