

Неравенства возвращаются

1. (Неравенство Чебышева.) Докажите, что для неотрицательных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n).$$

2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$2^{10}(a + b^2 + c^4)^7 \geq 7^7(abc)^4.$$

3. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac.$$

4. Докажите, что для положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

5. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{x_1^2 + (1 - x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + (1 - x_1)^2}.$$

6. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\frac{a + b + c + d}{abcd} \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}.$$

7. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab \geq 1$. Докажите, что

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right) \left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16.$$

8. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ — положительные числа. Докажите, что максимальное значение выражения

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}{(1 + a_1)(a_1 + a_2) \dots (a_{n-1} + a_n)(a_n + 2^{n+1})}$$

существует и найдите его.