

Индукция в графах

1. Докажите, что вершины любого графа можно покрасить в два цвета так, чтобы разно-цветных ребер было не меньше, чем одноцветных.
2. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$.
3. В стране несколько городов, причем между любыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране 2018 городов, из которых исходит одна дорога. Докажите, что можно построить 1009 новых дорог так, чтобы при закрытии любой дороги между любыми двумя городами существовал путь.
4. В компании из n человек ($n > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.
5. Постройте связный граф на $6n$ вершинах, все степени всех вершин которого равны 3 так, чтобы в нем не было полных подграфов на 3 вершинах.
6. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.
7. Дан граф, в котором $2n$ вершин и $n^2 + 1$ ребер. Докажите, что в нем
 - (а) хотя бы один треугольник;
 - (б) хотя бы n треугольников.