Теория чисел

Хорошо бы вспомнить формулировки теоремы Вильсона и малой теоремы Ферма

1. Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ является составным.

2. Пусть p — простое число.
(a) Докажите, что для любых чисел a и b верно, что $(a+b)^p \underset{p}{\equiv} a^p + b^p$.
(b) Выведите из этой задачи малую теорему Ферма.

3. **(a)** На доске написаны числа $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, ..., \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$. Можно ли выбрать какие-то пять из них, произведение которых равняется единице?
(b) Пусть произведение каких-то $2k+1$ чисел, написанных на доске, равно $\frac{m}{n}$. Докажите, что $m \underset{101}{\equiv} -n$.

4. Отметим на бумаге произвольным образом $p-1$ точку. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на p. Проведём из остатка k стрелочку в остаток ka.
(a) Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в каждую точку входит одна стрелочка.
(b) Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты.
(c) Докажите, что у всех циклических маршртутов одна и та же длина, и она делит $p-1$.
(d) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

5. Докажите, что любой нечетный простой делитель a^2+1, где a — натуральное, имеет вид $4m+1$.

6. Пусть $a_1, ..., a_p$ — конечная арифметическая прогрессия с разницей не кратной p. Докажите, что существует некоторый член a_k, такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot ... a_p$ делится на p^2.

7. **(a)** Найдите все простые числа p, такие что $(p-2)!$ не делится на $(p-1)$.
(b) Дано простое число p. При каких n число $p^n - 1$ делится на $(p-1)^2$.
(c) Для каких натуральных n число $(n-1)!+1$ является точной степенью n.