Турниры

Турниром называется полный ориентированный граф.

Путь или цикл называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

Ориентированный граф явялется *сильно связным*, если из любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой

1. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.

2. В турнире в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и из каждой хотя бы одно выходит. Докажите, что найдется цикл длины 3.

3. **(a)** Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
(b) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.
(c) В турнире нет циклов. Докажите, что вершины можно занумеровать таким образом, что каждое ребро ведет из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.

4. Докажите, что в произвольном турнире можно поменять направление не более одного ребра таким образом, чтобы он стал сильносвязным.

5. Даны $N \geqslant 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем однотонной, если нет двух таких точек A и B, что от A до B можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

6. Назовем *царем* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух.

(a) Докажите, что в любом турнире найдется царь.
(b) Докажите, что если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников.
(c) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.