КБШ

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца
Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы чисел a_i и b_i пропорциональны (или один из наборов нулевой).

1. Используя КБШ, докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

2. **(Дробное КБШ)** Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

3. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, ..., a_n$ справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n).$$

4. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенства:

(a)

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geqslant \frac{3}{2};$$

(b)

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant 2.$$

5. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, докажите неравенство:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

6. Числа a, b и c удовлетворяют условию $a + b + c \neq 0$. Докажите, что:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} \leqslant \frac{9}{2(a+b+c)^2}$$