Тематический разнобой

1. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD. Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

2. **Лемма об отражении ортоцентра.** Ортоцентр H вписанного в окружность Ω треугольника ABC отразили относительно прямой BC и относительно середины стороны BC. Получились точки X и Y соответственно.
   (a) Докажите, что точки X и Y лежат на Ω;
   (b) Докажите, что AY — диаметр Ω.

3. Биссектрисы углов B и C остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q. Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ.

4. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$. На меньшей дуге AD взяли произвольную точку E. Точки I, F, G — основания перпендикуляров, опущенных из E на отрезки AD, AC, BD соответственно. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника EFG.

5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника ADB, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ADC, пересекает сторону AB в точке N $(M, N \neq A)$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN. Докажите, что $OD \perp BC$.

6. Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку H пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.

7. Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне AC — точка E так, что $BC \parallel DE$. Точки P и Q на «меньшей» дуге BC окружности Ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QB и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180°$.

Письменная домашняя задача. Сдать 18 октября.

8. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Касательные к описанным окружностям треугольников AHB и AHC, восстановленные в точке H, пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XH = YH$.