Полуинвариант

1. Шоколадка имеет размер 4×10 плиток. За один ход разрешается разломать один из уже имеющихся кусочков на два вдоль прямолинейного разлома. За какое наименьшее число ходов можно разбить всю шоколадку на кусочки размером в одну плитку?

2. В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую. Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.

3. В квадрате 20×20 стоят 400 ненулевых **(a)** целых; **(b)** вещественных чисел. Можно изменить знак у всех чисел, стоящих в одном столбце или в одной строке. Докажите, что за конечное число таких операций можно добиться того, что сумма чисел, стоящих в любой строке или в любом столбце, будет неотрицательной.

4. На доске написаны 3 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое, геометрическое или гармоническое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее — натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов (если при любом возможном ходе набор чисел не меняется, то будем считать, что ходить больше нельзя).

5. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

6. В каждой из 2018 стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с данной страной стран правит не та партия, которая правит в данной стране. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

7. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он?