й

Теория чисел

Доказательство классических теорем

1. Дано простое число p и его некоторый ненулевой остаток a.
(a) Докажите, что существует и при том единственный остаток b, что $ab \underset{p}{\equiv} 1$ (такой остаток b называется *обратным* остатка a).
(b) Сопоставьте каждому остатку его обратный по модулю 17.
(c) Какие остатки совпадают со своими обратными остатками?

2. **(a)** **(Теорема Вильсона)** Пусть p – некоторое простое число. Докажите, что $(p-1)! \underset{p}{\equiv} -1$.
(b) Докажите, что если $(n-1)! \underset{n}{\equiv} -1$, то число n — простое.

3. Пусть a — некоторое число, которое не делится на простое число p.
(a) Докажите, что в последовательности $0 \cdot a$, $1 \cdot a$, $2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ все числа дают разные остатки по модулю p.
(b) Докажите, что $(1 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot \ldots \cdot ((p-1) \cdot a) \underset{p}{\equiv} (p-1)!$.
(c) **(Малая теорема Ферма)** Докажите, что $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$.

Применение классических теорем

1. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

2. В Москве каждую секунду один из жителей ест печеньку. Докажите, что если собрать все печеньки, съеденные за 6 недель и одну секунду, то их можно разделить на 11 равных кучек.

3. Пусть p и q различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \underset{pq}{\equiv} p + q$.

4. Докажите, что для любого простого $p > 5$ справедливо, что
(a) число $\underbrace{111\ldots11}_{p-1}$ делится на p;
(b) число $\underbrace{111\ldots11}_{p}$ не делится на p.

5. Пусть p — простое число. Докажите, что $(p-k)! \cdot (k-1)! \underset{p}{\equiv} (-1)^k$.

6. Найти все такие простые числа p, что число $5^{p^2} - 1$ делится на p.

7. Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на p^2.

8. Пусть числа p и $p+2$ являются простыми числами-близнецами. Докажите, что справедливо $4((p-1)!+1) + p \underset{p^2+2p}{\equiv} 0$.

9. Докажите, что для любого простого p число $2^{2^p} - 4$ делится на $2^p - 1$.