Отборочная олимпиада, решения

1. У 100 девочек было по 100 конфет. Каждая девочка подарила несколько своих конфет другим девочкам (конфеты, полученные в подарок, девочки оставляют себе). В результате у всех девочек оказалось разное число конфет. Докажите, что какая-то из девочек подарила конфет не меньше, чем у нее их оказалось в конце.

Решение. Пронумеруем девочек в порядке возрастания финального числа конфет, для каждого $1 \leqslant i \leqslant 100$ обозначим число конфет у девочки с номером i через a_i. Имеем $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$. Докажем, что $a_1 \leqslant 50$.

Предположим противное: пусть $a_1 \geqslant 51$. Раз a_i и a_{i+1} отличаются хотя бы на единицу, получаем, что $a_i \geqslant 50 + i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 100$. Просуммируем все эти неравенства, получим оценку на общее число конфет у девочек: $100 \cdot 100 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \geqslant 50 \cdot 100 + (1 + 2 + \ldots + 100) = 100 \cdot 201/2$. Противоречие.

Таким образом, $a_1 \leqslant 50$. Получается, что первая девочка подарила не менее 50 конфет, а осталось в конце у неё не более 50; то есть первая девочка подходит под условие.

2. На координатной плоскости нарисовали графики 100 квадратных трёхчленов вида $y = ax^2 + 2a^2x - (2a + 1)^2$ при $a = 1, 2, \ldots, 100$. Затем отметили красным все точки плоскости, через которые проходят хотя бы два нарисованных графика. Сколько получилось различных красных точек?

Решение. *Ответ:* 4951.
Попробуем найти абсциссы точек пересечения двух произвольных различных трёхчленов $y = ax^2+2a^2x-(2a+1)^2$ и $y = bx^2 + 2b^2x - (2b + 1)^2$ из данного семейства:

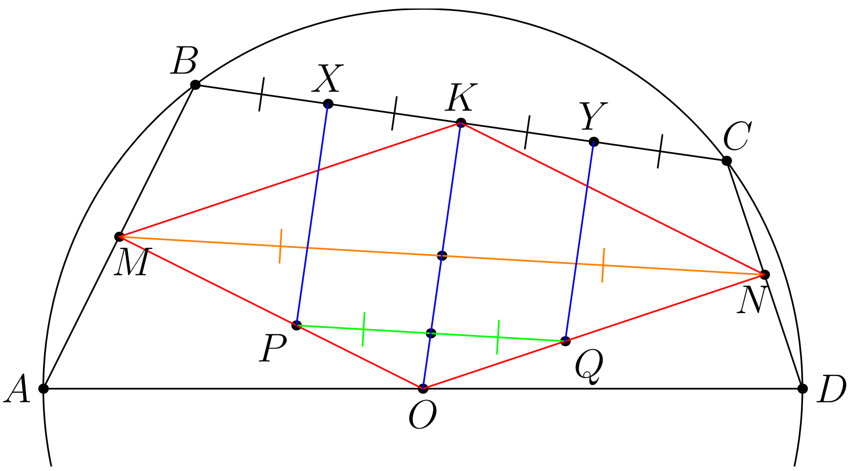
$$\begin{aligned} ax^2 + 2a^2x - (2a + 1)^2 &= bx^2 + 2b^2x - (2b + 1)^2; \\ (a - b)x^2 + 2(a - b)(a + b)x - (2a - 2b)(2a + 2b + 2) &= 0; \\ x^2 + 2(a + b)x - 4(a + b + 1) &= 0; \\ (x - 2)(x + 2(a + b + 1)) &= 0. \end{aligned}$$

Получаем, во-первых, что все трёхчлены проходят через одну и ту же точку с абсциссой 2 (а именно $(2, -1)$). Во-вторых, любые два трёхчлена имеют две различные общие точки. В третьих, никакие три разных трёхчлена не имеют общую точку, отличную от $(2, -1)$, и сейчас мы докажем это.

Предположим противное: пусть у трёхчленов $y = ax^2+2a^2x-(2a+1)^2$, $y = bx^2+2b^2x-(2b+1)^2$ и $y = cx^2+2c^2x-(2c+1)^2$ есть ещё одна общая точка (x_0, y_0). Из формул выше получаем, что $x_0 = -2(a + b + 1) = -2(a + c + 1)$, откуда $b = c$, что противоречит различности трёхчленов.

Теперь мы готовы посчитать число различных точек попарного пересечения графиков: одна точка $(2, -1)$ на всех графиках и для каждой пары парабол своя уникальная вторая точка пересечения. Всего получается $1 + 100 \cdot 99/2 = 4951$ красных точек.

3. В окружность вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, причём отрезок AD — диаметр окружности. Точки M, K, N — середины отрезков AB, BC, CD соответственно. Докажите, что прямая MN параллельна прямой, соединяющей центры описанных окружностей треугольников ABK и CDK.



Решение. Обозначим центры окружностей $(ABCD)$, (ABK), (CDK) через O, P, Q соответственно. Ясно, что O — середина AD, и что точки P и Q лежат на прямых OM и ON соответственно (эти прямые — суть серперы к отрезкам AB и CD). Обозначим через X, Y середины отрезков BK и KC соответственно. Очевидно, что прямые PX, QY и OK — это серперы к отрезкам BK, KC, BC.

Четырёхугольник $MKNO$ — параллелограмм Вариньона, и поэтому прямая OK делит отрезок MN пополам. Из теоремы Фалеса для параллельных прямых PX, QY и OK и для секущих XY и PQ очевидно, что прямая OK также делит отрезок PQ пополам. Получается, что одна и та же прямая OK делит отрезки MN и PQ пополам; а значит эти отрезки параллельны. Что и требовалось доказать.

4. Дано натуральное число n. Отметим на числовой прямой все точки, соответствующие дробям со знаменателями, не превосходящими n. Какое наибольшее число отмеченных точек можно накрыть открытым (не содержащим свои концы) интервалом длины $1/n$?

Решение. *Ответ:* $n - [n/2]$.

Обозначим через M множество натуральных чисел, лежащих в полуинтервале $(n/2, n]$.

Пример. Заметим, что все числа вида $1/m$, где $m \in M$, различны, и что их всех можно накрыть интервалом длины $1/n$, так как разница между максимумом и минимумом оценивается вот так:

$$\frac{1}{[n/2]+1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n/2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Оценка.

Лемма. Каждая дробь вида a/b, где $0 < b \leqslant n$, может быть представлена в виде A/B, где $B \in M$.

Доказательство. Если $b \notin M$, т. е. если $b \leqslant n/2$, то домножим числитель и знаменатель дроби на 2. Тогда знаменатель $2b$ новой дроби $2a/2b$ вырос, но остался в пределах $0 < 2b \leqslant n$. При необходимости, повторим процедуру домножения числителя и знаменателя дроби на 2 несколько раз, пока знаменатель не станет строго больше $n/2$.

Итак, каждая отмеченная точка может быть представлена в виде дроби со знаменателем из множества M. Ясно, что интервал из условия задачи не может содержать двух точек с одинаковым знаменателем, так как минимальная разность между такими точками больше либо равна длине интервала. Получается, что интервал содержит не более чем $|M| = n - [n/2]$ отмеченных точек.

5. В каждой клетке квадратной таблицы написано по положительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел этой строки равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел этого столбца равна b. Докажите, что $a = b$.

Решение. Предположим противное.

Не умалив общности, считаем, что $a > b$.

Максимальное число в строке (или в столбце) будем называть *чемпионом* этой строки (или столбца).

Утверждение 1. Всякий чемпион строки является чемпионом в своём столбце.

Доказательство. Предположим противное. Обозначим чемпиона строки, но не столбца, через x. Тогда сумма a двух самых больших чисел этой строки не больше $2x$, а сумма b двух самых больших чисел этого столбца меньше $2x$ (раз x — не чемпион в столбце, то он не превосходит каждого их двух самых больших чисел столбца и точно строго меньше чемпиона). Следовательно, $a \leqslant 2x < b$. Противоречие с предположением $a > b$.

Утверждение 2. Все чемпионы строк лежат в разных столбцах.

Доказательство. Предположим противное. Допустим, два чемпиона строк оказались в одном столбце. По утверждению 1 оба числа должны быть чемпионом этого столбца, то есть равны (скажем, x). Тогда $b = 2x$ и $a \leqslant 2x$ аналогично доказательству утверждения 1. Получаем $a \leqslant b$, противоречие с предположением $a > b$.

Из утверждения 2 следует, что в каждой строке есть единственный чемпион, и что эти чемпионы раскиданы по разным столбцам. Выберем минимального из них, обозначим его через s.

Рассмотрим второе по величине число в строке, содержащей s; обозначим его через t. Получаем, что $a = t+s$. В столбце, содержащем t, был свой единственный чемпион-в-строке r. $r \geqslant s$ в силу выбора s. Сумму b двух самых больших чисел столбца можно оценить снизу суммой $t+r$ двух любых чисел столбца, т. е. $t+r \leqslant b$. Соединяем всё вместе:

$$a = t + s \leqslant t + r \leqslant b,$$

что вновь противоречит предположению $a > b$.