Отборочная олимпиада

1. На кружок ходят девятиклассницы (которые всегда говорят правду), девятиклассники (которые всегда врут) и преподаватели (которые могут как сказать правду, так и солгать). В ряд стоят четыре человека, среди которых есть и девятиклассницы, и девятиклассники, и преподаватели.

- Самый левый сказал: «Рядом со мной стоит девятиклассница».
- Второй слева сказал: «Рядом со мной стоят девятиклассники».
- Третий слева сказал: «Рядом со мной стоят преподаватели».
- Самый правый сказал: «Рядом со мной стоит девятиклассница».

Определите, кто и где может стоять.

Решение. *Ответ:* единственный возможный порядок —

девятиклассник, преподаватель, девятиклассница, преподаватель.

Для удобства будем называть девятиклассниц — девочками, девятиклассников — мальчиками, а преподавателей — преподавателями. Разберем возможные случаи, где может стоять девочка (по условию у нас хотя бы одна девочка присутствует).

1. Пусть на первом месте стоит девочка. Тогда на втором месте тоже должна стоять девочка. Но тогда она девочка соврет, что невозможно. Противоречие.
2. Пусть на четвертом месте стоит девочка. Тогда на третьем месте тоже стоит девочка. Но тогда она соврет, что невозможно. Противоречие.
3. Пусть на втором месте стоит девочка. Тогда на первом и третьем местах стоит мальчики. Получается, что первый мальчик сказал правду, чего не могло быть. Противоречие.
4. Пусть на третьем месте стоит девочка. Тогда на втором и четвертом местах стоят преподаватели. Тогда на первом месте должен стоять мальчик. Заметим, что такая расстановка вполне возможна.

2. Андрей загадал 2019 вещественных чисел:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2019}.$$

Какое наибольшее количество корней может иметь уравнение

$$|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + \ldots + |x - a_{2019}| = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2019?$$

Решение. *Ответ:* 2.

Введём обозначение $f(x) := |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + \ldots + |x - a_{2019}|$.

Оценка. Для удобства обозначим $-\infty$ через a_0 и ∞ через a_{2020}.

Исследуем функцию $f(x)$ на монотонность, аккуратно раскрыв модули. Для каждого $i = 0, 2, \ldots, 2019$ при всех $x \in [a_i, a_{i+1}]$ выполнено

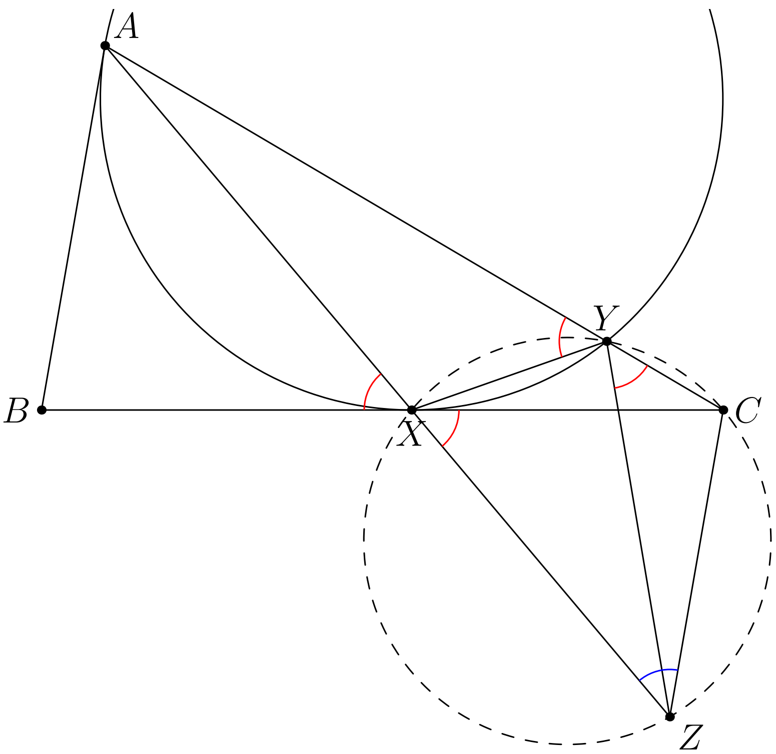
$$\begin{aligned} f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + \ldots + |x - a_{2019}| = \\ = (x - a_1) + \ldots + (x - a_i) + (a_{i+1} - x) + \ldots + (a_{2019} - x) = \\ = (2i - 2019) \cdot x - (a_1 + \ldots + a_i - a_{i+1} - \ldots - a_{2019}). \end{aligned}$$

Направление монотонности линейной функции $y = kx + b$ определяется её коэффициентом k. Руководствуясь этим соображением, из последней формулы заключаем, что при $i > 2019/2$ функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a_i, a_{i+1}]$, и что при $i < 2019/2$ функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a_i, a_{i+1}]$.

Склеив эти отрезки воедино, приходим к выводу: функция $f(x)$ убывает на луче $(-\infty, a_{1010}]$ и возрастает на луче $[a_{1010}, \infty)$. Следовательно, каждое своё значение функция $f(x)$ принимает не более двух раз (не более чем по разу на каждом из упомянутых лучей). Получается, что исходное уравнение имеет не более двух корней.

Пример. Рассмотрим $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_{2019} = 2019$. Легко видеть, что при таких значениях чисел a_i уравнение $f(x) = 1 + 2 + \ldots + 2019$ имеет хотя бы два корня: $x = 0$ и $x = 2020$.

3. Окружность ω, вписанная в угол B треугольника ABC, касается прямой AB в точке A и касается отрезка BC в точке X. Обозначим вторую точку пересечения окружности ω с отрезком AC через Y. Прямая, симметричная прямой XY относительно прямой AC, пересекает луч AX в точке Z. Докажите, что $CX = CZ$.



Решение. Заметим, что поскольку прямая YZ симметрична прямой YX относительно прямой AC, то $\angle CYZ = \angle XYA$. Поскольку BX — касательная к окружности ω, то $\angle XYA = \angle BXA$. Углы BXA и CXZ равны как вертикальные. Таким образом, $\angle CYZ = \angle XYZ = \angle BXA = \angle CXZ$, что означает, что точки C, Y, X и Z лежат на одной окружности. Используя это, получаем, что $\angle CXZ = \angle CYZ = \angle XYA = 180^\circ - CYX = \angle XZC$, что влечёт равнобедренность треугольника CXZ и, соответственно, равенство $CX = CZ$.

4. Два вора украли 101 кошелек с золотыми монетами: в первом кошельке лежит одна монета, во втором — две, в третьем — три, $\ldots$, в 101ом кошельке лежит 101 монета. Они по очереди забирают себе по одному кошельку. Первый вор ходит первым. Второй вор хочет, чтобы в самом конце суммарное число монет в его кошельках была кратно 50. Сможет ли первый вор ему помешать?

Решение. *Ответ:* Сможет.

Предъявим явно стратегию за первого вора. На своём первом ходу он заберёт себе кошелёк со 101 монетой.

Разобьём оставшиеся 100 кошельков на 50 пар: 1 и 51, 2 и 52, 3 и 53, $\ldots$, 50 и 100. Если второй вор на своём ходу забирает себе какой-то кошелёк k, то мы ответным ходом забираем себе кошелёк из той же пары, что и k (то есть $k \pm 50$). Ясно, что описанная стратегия позволяет первому вору корректно совершать ходы.

Посчитаем, каким мог быть остаток суммарного числа монет в конце игры в кошельках второго вора при делении на 50. Из каждой из рассмотренных пар второй вор забрал себе ровно один кошелёк, но числа k и $50 + k$ имеют одинаковый остаток при делении на 50. Значит, остаток количества набранных вторым вором монет по модулю 50 не зависит от того, какой именно кошелёк в каждой паре он выбрал, и совпадает с остатком числа $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = 25 \cdot 51$, которое не кратно 50.

5. В стране более 10 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Известно, что количество дорог, выходящих из произвольно выбранного города, делится на 10. Докажите, что найдутся хотя бы 11 городов, из которых выходит одинаковое количество дорог.

Решение.

Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют городам, а рёбра — дорогам. Предположим, что утверждение задачи неверно.

Заметим, что в графе G есть хотя бы одна неизолированная вершина, т.е. вершина степени не 0. (Иначе в G есть хотя бы 11 вершин степени 0, так как по условию в G всего хотя бы 11 вершин. Противоречие.)

Значит, для некоторого целого $k \geqslant 0$ число неизолированных вершин лежит на отрезке $[10k+1, 10(k+1)]$. Тогда степень любой вершины меньше $10(k+1)$, значит, степени неизолированных вершин могут принимать только значения

$10, 20, \dots, 10k$. По предположению каждое из этих значений принимается не более 10 раз. Значит, неизолированных вершин не более $10k$. Противоречие.