

Новогодний листик по геометрии

1. Треугольник ABC остроугольный, причем $\angle A = 60^\circ$. Обозначим через O и H его центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Докажите, что прямая OH является биссектрисой одного из углов между высотами.
2. В остроугольном треугольнике ABC середина BC обозначена через A_0 . Перпендикуляр, опущенный из середины отрезка BA_0 на сторону AC , пересекает перпендикуляр, опущенный из середины отрезка CA_0 на сторону AB , в точке A' . Аналогично определены точки B' и C' . Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.
3. Две окружности ω_A и ω_B с центрами в точках A и B соответственно пересекаются в точках M и N . Луч AM второй раз пересекает окружность ω_B в точке P , луч BM второй раз пересекает окружность ω_A в точке Q . Прямая PQ второй раз пересекает окружности ω_A и ω_B в точках X и Y . Докажите, что $MX = MY$.
4. На меньшей дуге BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC отмечена точка X . Точки K и L — проекции точки X на стороны AB и BC . Точки M и N — середины отрезков KL и AC соответственно. Докажите, что $\angle XMN = 90^\circ$.
5. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω . Касательные к Ω в точках A и B пересекаются в точке X , касательные к Ω в точках A и C пересекаются в точке Y . Прямая, проходящая через X параллельно AB , пересекает прямую, проходящую через Y параллельно AB , в точке Z . Докажите, что точка Z равноудалена от точек B и C .
6. На меньшей дуге BC описанной окружности равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка X . Прямые CX , BX пересекают продолжения сторон AB , AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что величина $BP \cdot CQ$ не зависит от положения точки X .
7. В угол BAC вписана окружность ω , B и C — точки касания ω со сторонами угла. На средней линии треугольника ABC , параллельной BC , отмечены точки X и Y . Из точек X и Y проведены отрезки касательных к ω , пересекающиеся в точке Z . Докажите, что в четырёхугольник $AXZY$ можно вписать окружность.
8. На отрезке BC отмечены точки B_1 , C_1 . У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственные стороны попарно параллельны. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1A_1C и C_1A_1B пересекаются вторично на прямой AA_1 .
9. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и отмечен центр I вписанной окружности. Хорда XY описанной окружности треугольника BIC проходит через точку D . Докажите, что AD — биссектриса угла XAY .
10. Отражения описанной окружности вписанного четырёхугольника $ABCD$ относительно сторон AB и AD пересекаются в точках A и A' . Аналогично определены точки B' , C' , D' . Докажите, что четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны.
11. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром I . Отрезок AI пересекает ω в точке X . Касательная к ω , восстановленная в точке X , пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что расстояние от P до биссектрисы угла ABC равно расстоянию от Q до биссектрисы угла ACB .
12. На сторонах AB , AC треугольника ABC отмечены точки U и V соответственно так, что четырёхугольник $BUVС$ — вписанный. Выяснилось, что центр вневписанной окружности треугольника AUV , касающейся отрезка UV , лежит на окружности (ABC) . Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке UV .