Отборочная олимпиада

1. Имеется набор из нескольких монет номиналом 1, 2, 3 или 5 копеек. Известно, что этими монетами можно набрать ровно четыре рубля. Докажите, что ими можно набрать ровно три рубля.

2. Прямая ℓ касается описанной окружности остроугольного неравенобедренного треугольника ABC в точке A. Окружность с центром B и радиусом AB вторично пересекает прямые ℓ и AC в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через ортоцентр треугольника ABC.

3. Вещественные числа x, y, z лежат на отрезке $[0, 1]$. Докажите неравенство:

$$\sqrt{xyz} + \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)} \leqslant 1.$$

4. Даны натуральные числа b и c такие, что $c + 1$ делится на b. Докажите, что существуют такие натуральные числа x, y и z, что $x + y = bz$ и $xy = cz$.

5. На плоскости внутри квадрата со стороной 1 сидят $n \geqslant 2$ зайцев. Если два зайца сидят в вершинах A и C некоторого прямоугольника $ABCD$, то за один ход они могут перепрыгнуть в вершины B и D. Докажите, что никакие два зайца не удалятся друг от друга на расстояние, большее $2\sqrt{n}$.

6. В клетках таблицы 15×15 изначально записаны нули. За один ход разрешается выбрать любой столбец или любую строку, стереть записанные там числа и записать туда все числа от 1 до 15 в произвольном порядке — по одному в каждую клетку. Какую максимальную сумму чисел в таблице можно получить такими ходами?