

Серия 14. Многочлены

1. Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных вещественных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.
2. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа a_1, a_2, \dots, a_{10} , что уравнение $(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_{10}) = (x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot \dots \cdot (x + a_{10})$ будет иметь ровно пять различных действительных корней.
3. Последовательность многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ определена как $P_0(x) = x$, $P_{n+1} = P_n(x - 1)P_n(x + 1)$. Найдите наибольшее натуральное k , для которого $P_{2018}(x)$ делится на x^k .
4. Вася перемножил несколько квадратных трёхчленов вида $x^2 + px + q$ (p и q — вещественные) и в результате получил многочлен, все коэффициенты которого положительны. Докажите, что хотя бы у одного из исходных трёхчленов все коэффициенты были также положительны.
5. Известно, что некоторый многочлен с вещественными коэффициентами в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.
6. Докажите, что если многочлен $P(x)$ степени n с вещественными коэффициентами принимает целые значения в точках $x = 0, 1, 2, \dots, n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.
7. Дано n вещественных чисел, p — их произведение. Разность между p и каждым из этих чисел — целое нечётное число. Докажите, что все данные n чисел иррациональны.
8. Даны приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $h(x)$, графики которых имеют общую точку, и $g(x)$ — многочлен, отличный от константы (все коэффициенты многочленов f, g, h — вещественные). Оказалось, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех вещественных x . Докажите, что $f(x) = h(x)$.