

Серия 13. Перестановки, ликбез

Определение 1. *Транспозиция* — перестановка, которая меняет два элемента местами, а все остальные оставляет неподвижными. Т. е. циклическая перестановка длины два, обозначать можно (i, j) . *Элементарной транспозицией* называется транспозиция, меняющая два соседних элемента местами $(i, i + 1)$.

1. Докажите, что любую перестановку можно представить в виде произведения элементарных транспозиций.
2. В городе разрешаются только *парные обмены квартир* (это когда несколько жителей города бьются на непересекающиеся пары и внутри пар меняются квартирами). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

Определение 2. Перестановка σ разложена в произведение транспозиций. Тогда *чётностью* перестановки σ называется чётность количества этих транспозиций.

Определение 3. *Инверсией* перестановки σ называется такая пара чисел i, j , что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

3. (а) Докажите, что при домножении на элементарную транспозицию изменяется чётность числа инверсий.
(б) Докажите, что чётность перестановки определена корректно (т. е. чётность числа транспозиций не зависит от выбора разложения).
4. (а) Зная чётность двух перестановок из S_n можно ли определить чётность их произведения?
(б) Перестановка раскладывается в произведение циклов длины d_1, \dots, d_k . Найдите чётность перестановки.
5. Какие перестановки можно получить, перемножая циклы длины 3?
6. **Игра «пятнашки».** В квадрат 4×4 кладут 15 фишек, на которых и написаны числа от 1 до 15. Одна клетка при этом остаётся пустой. Можно двигать на пустую клетку соседнюю по стороне фишку. Докажите, что таким образом из первой конфигурации нельзя получить вторую.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

7. После усердных тренировок Вася в совершенстве овладел навыком сборки кубика Рубика. Он уверяет, что может даже собрать кубик Рубика, у которого перевернули ровно один из боковых кубиков (то есть тот, что с двумя цветными гранями). Можно ли верить этому Васе?
8. В ресторане есть n юношей, n девушек и n столов. За каждым столом сидят один юноша и одна девушка. На каждом столе написано, за какой номер стола должен пересесть сидящий за ним юноша и за какой стол сидящая за ним девушка. Каждые десять минут все посетители ресторана пересаживаются в соответствии с номерами, указанными на их столах. При каких n можно так написать числа на столах, что в итоге каждый юноша посидит с каждой девушкой и каждый из пришедших посидит за каждым столом?