Серия 12. Разнобой по комбинаторике

1. В ряд стоит 2018 чашек. За один ход разрешается взять четыре подряд идущие чашки и переставить их в обратном порядке. Можно ли такими операциями переставить все чашки в обратном порядке?

2. Какое наименьшее количество уголков (из трёх клеток) можно разместить в квадрате 8×8 так, чтобы в этот квадрат больше нельзя было поместить ни одного такого уголка?

3. 10 новобранцев стоят в ряд. Каждую минуту какие-то двое, стоящих рядом, меняются местами. В какой-то момент оказалось, что каждый новобранец побывал и на первом, и на последнем месте. Докажите, что прошло не меньше 65 минут.

4. Депутаты Парламента образовали несколько комиссий не более чем из 10 человек каждая. Известно, что для любых одиннадцати комиссий найдётся человек, который входит во все эти комиссии. Докажите, что найдётся человек, который входит во все комиссии.

5. В левом нижнем углу доски стоит фишка. За ход ее можно передвинуть либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку вправо, либо по на одну клетку по диагонали вправо-вверх. Обозначим через A число маршрутов фишки в противоположный угол доски, а через B — число маршрутов фишки в противоположный угол доски, не заходящих в левый столбец и в верхнюю строку (кроме начальной и конечной позиций). Как связны между собой числа A и B?

6. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.

7. Игра в «супершахматы» ведётся на доске размером 100×100, в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру А передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по шашке. Назовём клетку хорошей, если в соседних с ней по стороне клетках (саму эту клетку не считаем) стоит чётное число шашек. Может ли ровно одна клетка доски быть хорошей?