Разнобой-1

1. В компании 100 человек. Для любых k найдутся двое (отличных от них) незнакомых, каждый из которых знает любого из этих k. При каком наибольшем k это возможно?

2. Докажите, что $\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} \neq \overline{ba} \cdot \overline{ac} \cdot \overline{cb}$, если цифры a, b, c попарно не равны.

3. Игра проходит на клетчатой доске 9×9. Играют двое, ходы делают по очереди, начинает первый. Он ставит в свободные клетки крестики, второй — нолики. Когда все клетки заполнены, подсчитывается количество строк и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов, — число K, и количество строк и столбцов, в которых ноликов больше, чем крестиков — число N (всего строк и столбцов — 18). Разность $K - N$ считается выигрышем первого. Найдите такое значение X, что первый может себе обеспечить выигрыш не меньше X, как бы ни играл второй, а второй может проиграть не больше X, как бы ни играл первый.

4. Существует ли такой набор из 100 попарно различных натуральных чисел, что при любом разбиении чисел этого набора на две непустые группы сумма чисел одной из групп делится на сумму чисел другой группы?

5. Можно ли отметить на числовой оси 50 отрезков (возможно, перекрывающихся) так, что их длины — это $1, 2, 3, \ldots 50$, а концы отрезков — это все целые точки от 1 до 100 включительно?

6. Саша написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что не более 100 раз был написан точный квадрат.

7. В ЕГЭ принимают участие 25 школьников. Экзамен состоит из нескольких вопросов, на каждый из которых можно дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в ЕГЭ было не больше 6 вопросов.

8. Про положительные числа x и y известно, что числа
$$x + \sqrt{y},\ y + \sqrt{x},\ \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
— целые. Докажите, что числа x и y — целые.