

Серия 22. Разнобой-2

1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?
2. В 10 коробках лежат карандаши. Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причём в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что можно выбрать из каждой коробки по карандашу так, что все они будут разных цветов.
3. Сумма цифр числа n равна 100, а сумма цифр числа $44n$ равна 800. Найдите сумму цифр числа $3n$.
4. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k , что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.
5. Даны положительные числа x, y, z , каждое из которых не меньше 2. Докажите неравенство

$$(x^3 + y)(y^3 + z)(z^3 + x) \geq 125xyz.$$

6. В ряд лежит 101 монета. Известно, что среди этих монет 21 фальшивая, причём фальшивые лежат подряд. Также известно, что фальшивые монеты весят одинаково и меньше, чем настоящие. За какое минимальное число взвешиваний на обычных чашечных весах можно выявить все фальшивые монеты?
7. Дано несколько квадратный трёхчленов, каждый из которых имеет два вещественных корня. Сумма всех этих трёхчленов равна 0. Докажите, что среди этих трёхчленов найдутся два, разность которых имеет вещественный корень.
8. Дана квадратная таблица 100×100 . Проведено несколько ломаных без самопересечений, не имеющих общих точек, идущих по сторонам клеток. Известно, что ломаные идут строго внутри квадрата, а концами выходят на его границу. Докажите, что существует неугловой узел, который не лежит ни на одной ломаной.