

Новогодний листик, комбинаторика

1. Вова и Влад играют в игру на доске 100×100 . В начале в каждой клетке написано число 0. Каждым ходом они выбирают столбец или строку и ко всем выбранным числам прибавляют по 1. Игроки по очереди делают 200 ходов (по 100 ходов каждый), после чего игра заканчивается. Вова ходит первым и выигрывает, если в итоге больше половины чисел давало остаток 1 при делении на 3, а Влад — вторым, и выигрывает, если в итоге больше половины чисел на 3 делилось (в противном случае ничья). Кто выигрывает при правильной игре?
2. В канун рождества 100 рыцарей собрались за круглым столом. Наутро каждый помнил, рядом с кем он сидел, но не помнил, кто из соседей был справа, а кто слева. Мерлин хочет рассадить их так, чтобы каждый из них снова оказался рядом со своими вчерашними соседями. Какое минимальное число вопросов ему для этого нужно задать?
3. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 100 и 250.
4. Докажите, что если в однокруговом шахматном турнире все участники, кроме одного, набрали одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл. (Победа — 1 очко, ничья — $1/2$ очка, поражение — 0.)
5. Какое наименьшее количество клеток требуется отметить на шахматной доске, чтобы каждая клетка доски (отмеченная или неотмеченная) граничила по стороне хотя бы с одной отмеченной?
6. Саша начертил квадрат 6×6 клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в неё число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Чему могла быть равна сумма? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)
7. Дана клетчатая полоса 1×2019 . Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй — нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выиграть (как бы ни играл его соперник)?
8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, используя все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?
9. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых (все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?
10. На сдаче экзамена СОВ учеников смогли рассадить по n рядам так, чтобы ни у одного из них не было друзей в своём ряду. При этом рассадить их таким же образом по $n - 1$ рядам было невозможно. Докажите, что на каждом ряду можно выбрать старосту так, чтобы любые два старосты на соседних рядах были бы друзьями.
11. 2010 монет разложены по 5 коробкам. Мы можем забрать любую коробку, но перед этим разрешается сколько угодно раз выполнять следующую операцию: взять 4 монеты из одной коробки (если там хотя бы 4 монеты) и переложить их по одной в другие коробки. Какое наибольшее количество монет мы можем гарантированно получить?
12. Все клетки квадратной таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Петя закрашивает клетки по следующим правилам. Вначале он закрашивает k клеток по своему усмотрению. Далее каждым ходом Петя может закрасить одну еще не закрашенную клетку с номером a , если для неё выполнено хотя бы одно из двух условий: либо в одной строке с ней есть уже закрашенная клетка с номером меньшим, чем a ; либо в одном столбце с ней есть уже закрашенная клетка с номером большим, чем a . При каком наименьшем k независимо от исходной нумерации Петя за несколько ходов сможет закрасить все клетки таблицы?