Новогодний листик по алгебре

1. Можно ли расставить по кругу числа $1, 2, \ldots, 60$ в таком порядке, чтобы сумма любых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма любых двух чисел, между которыми находится два числа, делилась на 3, $\ldots$, сумма любых двух чисел, между которыми находится шесть чисел, делилась на 7?

2. Известно, что модули корней каждого из двух квадратных трехчленов x^2+ax+b и x^2+cx+d меньше десяти. Может ли трехчлен $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}$ иметь корень, модуль которого больше 10?

3. Вещественные ненулевые числа x, y, z таковы, что $x+y+z=a$ и $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=a^{-1}$. Какие значения может принимать выражение $(x-a)(y-a)(z-a)$?

4. Дан многочлен $P(x)$ шестой степени. Известно, что $P(1)=P(-1), P(2)=P(-2), P(3)=P(-3)$. Докажите, что $P(x)=P(-x)$ при любом x.

5. Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ тоже записывается одними единицами?

6. Существует ли такое натуральное число, что произведение всех его натуральных делителей (включая 1 и само число) оканчивается ровно на 2001 ноль?

7. Докажите, что из любых шести четырехзначных чисел, взаимно простых в совокупности, всегда можно выбрать пять чисел, также взаимно простых в совокупности.

8. Существуют ли различные взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c, большие 1 и такие, что 2^a+1 делится на b, 2^b+1 делится на c, а 2^c+1 делится на a?

9. Найдите все простые числа p, q, r и s такие, что их сумма - простое число, а числа p^2+qs и p^2+qr - квадраты натуральных чисел. (Числа p, q, r и s предполагаются различными).

10. На отрезке $[0, 2002]$ отмечены его концы и точка с координатой d, где d - целое взаимно простое с 1001 число. Разрешается отметить середину любого отрезка с концами в отмеченных точках, если её координата целая. Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить все целые точки на отрезке?

11. Сумма обратных величин положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}+\frac{a_2}{a_2^2+a_3^2}+\ldots+\frac{a_n}{a_n^2+a_1^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

12. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше 1, равна S, причем $\frac{a_i^2}{a_i-1}>S$ для любого $i=1,2,3$. Докажите, что $\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_3+a_1}>1$