

Серия 4. Введение в теорию вероятностей

Дискретным вероятностным пространством называется конечное (или счётное) множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлен вещественный вес p_i с условиями $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются *событиями*, элементы ω_i — *элементарными исходами*. Для каждого события $A \subset \Omega$ определена его *вероятность* $P(A)$ посредством формулы $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$. В частности, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

Функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины $f(\omega)$ определено её *математическое ожидание*: $\mathbb{E}f = \sum_{i=1}^n p_i f(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин f и g и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения $\mathbb{E}(f + g) = \mathbb{E}f + \mathbb{E}g$, $\mathbb{E}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \mathbb{E}(f)$.

0. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Аня хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое число совпадающих бусинок Оксана может гарантированно получить?
 1. У каждого из двух равных правильных додекаэдров отметили по 9 вершин. Докажите, что первый додекаэдр можно так совместить со вторым, чтобы по крайней мере пять его отмеченных вершин совпали с отмеченными вершинами второго. (*Додекаэдр* — правильный многогранник, у которого 12 пятиугольных граней, 30 рёбер и 20 вершин, в которых сходится по три ребра.)
 2. На компьютере хранятся n различных фотографий. Из них составили k альбомов, по m фотографий в каждом (одна и та же фотография может находиться в нескольких альбомах), причём $k < 2^{m-1}$. Докажите, что можно удалить несколько фотографий так, чтобы каждый альбом стал меньше, но при этом не пустым.
 3. Докажите, что из любого графа можно выкинуть не более чем $1/d$ его рёбер так, чтобы стало возможным раскрасить его вершины в d цветов правильным образом.
 4. Дано четное число $n > 2$. Клетки доски $n \times n$ раскрашены в $n^2/2$ цветов, каждого цвета — ровно по две клетки. Докажите, что можно расставить на доске n не бьющих друг друга ладей так, чтобы они все стояли на клетках разного цвета.
-
5. На столе лежит $2n$ визуально неразличимых батареек, из них ровно n хороших, а остальные n — плохие. За одну попытку разрешается вставить в фонарик две батарейки; при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число попыток удастся включить фонарик?
 6. В ориентированном ациклическом графе самая длинная цепь содержит n вершин. Докажите, что вершины графа можно разбить на n непересекающихся антицепей.
 7. На плоскости отметили все $(n+1)^2$ точек с целыми координатами от 0 до n . Требуется провести несколько прямых так, чтобы все точки, кроме $(0, 0)$, лежали хотя бы на одной из проведенных прямых и чтобы ни одна прямая не проходила через $(0, 0)$. Каким наименьшим числом прямых можно обойтись?