Серия 8. Разнобой по неравенствам

0. (*Неравенство Несбита*) Для любых положительных чисел a, b, c выполнено
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

1. Даны произвольные неотрицательные числа x, y, z. Докажите неравенство
$$xy+yz+xz\geqslant x\sqrt{yz}+y\sqrt{xz}+z\sqrt{xy}.$$

2. Докажите, что для любого положительного значения a верно неравенство
$$a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}\geqslant 16.$$

3. Для произвольных положительных чисел a, b и c докажите, что
$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab+bc+ac\geqslant a+b+c$. Докажите, что $a+b+c\geqslant 3$.

5. Докажите, что при всех положительных x, y, z выполнено неравенство:
$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant x+y+z.$$

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a+b+c=1$. Докажите неравенство
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geqslant\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

7. (*Частный случай неравенства Шура*) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c верно
$$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

8. Числа a, b, c положительны. Докажите, что
$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c}{2c+a+b}\leqslant\frac{3}{4}.$$

9. Для любых неотрицательных чисел x, y, z докажите, что
$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\geqslant 3\sqrt{xy+yz+zx}.$$