Серия 37. SOS-метод решения неравенств

0. Даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=1$. Докажите неравенство

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leqslant\frac{3}{2}.$$

2. (*Неравенство Шура*) Для положительных чисел a, b, c и вещественного λ докажите неравенство

$$a^{\lambda+2}+b^{\lambda+2}+c^{\lambda+2}+a^{\lambda}bc+b^{\lambda}ca+c^{\lambda}ab\geqslant a^{\lambda+1}(b+c)+b^{\lambda+1}(c+a)+c^{\lambda+1}(a+b).$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$3\cdot(a^3+b^3+c^3+abc)\geqslant 4\cdot(a^2b+b^2c+c^2a).$$

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+c^2=1$. Докажите неравенство

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\leqslant\frac{2}{3}.$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{(a-b)(a-c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-c)(b-a)}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c-a)(c-b)}{2c^2+(a+b)^2}\geqslant 0.$$

6. Для любых положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}\geqslant 6.$$

Полезные факты.

Во-первых,

$$(a-b)(b-c) = \frac{(c-a)^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2}{2}.$$

Во-вторых, если многочлен $P(a,b,c)$ с вещественными коэффициентами удовлетворяет соотношениями $P(a,b,c) = P(b,a,c)$ и $P(a,a,c) = 0$, то он делится на $(a-b)^2$. То же самое касается и рациональных функций.

В-третьих, если $P(a,b,c)$ — циклически симметричный многочлен, то

$$(a-b)\cdot P(a,b,c) + (b-c)\cdot P(b,c,a) + P(c-a)\cdot P(c,a,b) = 0,$$

а значит после первого вынесения скобок $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-a)$ в них можно безнаказанно добавлять циклически симметричные выражения.

SOS theorem. Даны вещественные числа $a \geqslant b \geqslant c$ и S_a, S_b, S_c. Предположим, что выполнено хотя бы одно их трех условий:

- $S_b \geqslant 0$, $S_a + S_b \geqslant 0$, $S_b + S_c \geqslant 0$;
- $S_a \geqslant 0$, $S_c \geqslant 0$, $S_a + 2S_b \geqslant 0$, $2S_b + S_c \geqslant 0$;
- $S_b \geqslant 0$, $S_c \geqslant 0$, $a^2 S_b + b^2 S_a \geqslant 0$.

Тогда $(a-b)^2 S_c + (b-c)^2 S_a + (c-a)^2 S_b \geqslant 0$.

Доказательство теоремы.

Введем обозначения $x := a-b$, $y := b-c$, тогда $x+y = a-c$ и $x, y \geqslant 0$ в силу упорядочивания.

Очевидно, что $x^2 + y^2 \leqslant (x+y)^2 \leqslant 2x^2 + 2y^2$.

Условие 1. Имеем $(c-a)^2 \geqslant (a-b)^2 + (b-c)^2$. Раз $S_b \geqslant 0$, то

$$(a-b)^2 S_c + (b-c)^2 S_a + (c-a)^2 S_b \geqslant (a-b)^2 (S_b + S_c) + (b-c)^2 (S_a + S_b) \geqslant 0.$$

Условие 2. Имеем $(c-a)^2 \leqslant 2\cdot((a-b)^2 + (b-c)^2)$. Если $S_b \geqslant 0$, то утверждение очевидно; в противном случае:

$$(a-b)^2 S_c + (b-c)^2 S_a + (c-a)^2 S_b \geqslant (a-b)^2 (S_c + 2S_b) + (b-c)^2 (S_a + 2S_b) \geqslant 0.$$

Условие 3. Заметим, что $a - c \geqslant \frac{a}{b}\cdot(b-c)$ в силу упорядочивания. Раз $S_b \geqslant 0$, то

$$(b-c)^2 S_a + (c-a)^2 S_b \geqslant (b-c)^2 (S_a + \frac{a^2}{b^2} S_b) \geqslant 0;$$

а дальше воспользуемся $S_c \geqslant 0$, и все. *Теорема доказана.*