Серия 36. Метод касательных в неравенствах

1. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют соотношению $a+b+c+d=1$. Докажите неравенство

$$6\cdot(a^3+b^3+c^3+d^3)\geqslant(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}.$$

2. Положительные числа a, b, c, d в сумме дают 4. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\leqslant\frac{4}{9}.$$

3. Для любых положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\geqslant\frac{3}{5}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}}>2.$$

5. Даны положительные числа a, b, c, d, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}+\frac{1}{c^3+1}+\frac{1}{d^3+1}=2.$$

Докажите неравенство

$$\frac{1-a}{1-a+a^2}+\frac{1-b}{1-b+b^2}+\frac{1-c}{1-c+c^2}+\frac{1-d}{1-d+d^2}\geqslant 0.$$

6. Положительные числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ в произведении дают 1. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{1+a_1^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+a_2^2}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1+a_n^2}{2}}\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

7. Известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$, числа положительны. Покажите, что

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\leqslant\frac{3}{16}.$$