Серия 35. Раскраски графов

Говорят, что вершины графа покрашены *правильным образом*, если любые две соседние вершины имеют различные цвета. Минимальное число цветов, в которое можно правильным образом покрасить вершины графа G, называется *хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi(G)$.

1. **(a)** Известно, что в любом подграфе графа G существует вершина степени не более d. Докажите, что вершины графа G можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.
(b) Дан ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более d стрелок. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в $2d+1$ цвет.

2. Приведите пример такого графа, что его хроматическое число не меньше пяти и он не содержит полного подграфа на пяти вершинах.

3. Степень произвольной вершины связного графа G не превосходит d. Докажите, что граф можно правильным образом раскрасить в d цветов, если
(a) есть вершина степени меньше, чем d;
(b) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность;
(c) $d > 2$ и есть две вершины такие, что при удалении их обеих граф теряет связность;
(d) есть три вершины u, v и w такие, что u смежна с v и w, вершины v и w несмежны и при удалении вершин v и w связность не нарушается.

4. (**Теорема Брукса**) Степени всех вершин связного графа, не являющегося нечетным циклом или полным графом из $d+1$ вершины, не превосходят d. Докажите, что его вершины можно правильно раскрасить в d цветов.

5. Степень любой вершины графа не превосходит 3. При каком наименьшем n вершины этого графа заведомо можно покрасить в n цветов так, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами одинакового цвета было больше двух? (*Расстоянием* между двумя вершинами графа называется число рёбер в самом коротком пути, соединяющем эти две вершины.)

6. Дан граф на n пронумерованных вершинах. Известно, что его можно покрасить правильным образом , используя цвета 1, 2, 3, 4, 5 (все цвета использовать не обязательно). Оказалось, что такая раскраска единственна с точностью до перенумерации цветов. Докажите, что в графе хотя бы $4n-10$ рёбер.

7. Дана фиксированная раскраска графа G в k цветов. Известно, что граф G нельзя правильно раскрасить в $k-1$ цвет. Докажите, что в G найдётся простой путь, содержащий ровно по одной вершине каждого из k цветов.

8. Дан связный граф G. Известно, что если из него выкинуть все рёбра любого нечётного цикла, то граф потеряет связность. Докажите, что $\chi(G) \leqslant 4$.

9. Рассмотрим граф, в котором вершинами являются трёхэлементные подмножества множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$, а рёбрами соединены подмножества, пересекающиеся ровно по одному элементу. Найдите хроматическое число этого графа.