Тренировочная олимпиада 2

1. Зайчик выписал в строчку 120 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. Медвежонок выписал под ними еще какие-то 120 последовательных чисел в некотором порядке (наборы чисел могли пересекаться). Под каждым числом второй строчки хитрый лис написал произведение этого числа и числа, стоящего над ним. Могло ли так получиться, что в третьей строчке тоже стоят 120 последовательных натуральных чисел?

2. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $n \geqslant 2$. Докажите неравенство

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \ldots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n.$$

3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота BB_1 и отмечены середины M и N большой и малой дуг BC описанной окружности соответственно. На прямой AM выбрана точка K так, что $\angle NB_1K = 90°$. Докажите, что $BK = BM$.

4. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Выступление сборной Москвы на финале Всероссийской олимпиады школьников оценивается по n показателям, причём показатель номер i может принимать любые натуральные значения от 1 до a_i. Сборная Москвы *улучшила* результат по сравнению с прошлым годом, если все показатели, за исключением не более чем одного, выросли. Пусть $S = \sum \frac{1}{a_i}$.

(a) Докажите, что если $S > 1$, то сборная Москвы не сможет бесконечно долго улучшать результаты.

(b) Докажите, что если $S \leqslant \frac{1}{2}$, то возможна ситуация, когда сборная Москвы бесконечно долго улучшает свои результаты.