

## Тренировочная олимпиада 1

1. **Приведённый** квадратный трёхчлен  $f(x)$  имеет два положительных корня, а среди корней многочлена  $f(f(x))$  есть два отрицательных. Докажите, что оба корня трёхчлена  $f(x)$  меньше 1.
2. На окружности с диаметром  $AB$  выбрана точка  $C$ . Через середину меньшей дуги  $AC$  и середину отрезка  $BC$  проведена прямая  $\ell$ , вторично пересекающая окружность в точке  $K$ . Касательные к окружности в точках  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $L$ . Докажите, что  $KL \perp \ell$ .
3. Неправильная пчела и Винни-Пух играют в игру на бесконечной правильной шестиугольной решётке в виде сот. Изначально все шестиугольники пустые, начинает пчела. За один ход пчела заливает неправильным мёдом два соседних пустых шестиугольника, а за свой ход Винни-Пух выедает весь неправильный мёд из любого залитого шестиугольника. Какое максимальное количество залитых шестиугольников подряд в одну линию после некоторого своего хода может гарантировано получить пчела?
4. Последовательность  $\{a_n\}$  вещественных чисел определена условиями
  - $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ .
  - При всех целых  $k \geq 0$  выполнено  $a_{k+6}a_{k+1} = a_{k+5}a_{k+2} + a_{k+4}a_{k+3}$ .

Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.