Серия 33. UVW-метод решения неравенств

1. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют следующим условиям: $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=1$. Найдите максимум и минимум выражения $x^3+y^3+z^3$.

2. Вещественные числа x, y, x связаны соотношением $x+y+z=0$. Докажите, что $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3 \geqslant 6xyz$.

3. Даны неотрицательные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$(a+b+c)^5 \geqslant 81 \cdot abc \cdot (a^2+b^2+c^2).$$

4. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите неравенство

$$a^5+b^5+c^5+abc(ab+bc+ca) \geqslant a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a).$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

6. Положительные числа a, b, c в сумме дают 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ca} \leqslant \frac{3}{8}.$$

7. (*Задача 9.8 финала 2016*) Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

8. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Докажите, что $ab+bc+ca-abc \leqslant 2$.